「ブラックホール戦争」の解説

NHK の映像「相対論 vs 量子論 事象の地平線と”異次元のダンス”」の解説

1　本来の量とアナロジーの量

本来の量：ある状況のもとで、法則や構造などのいろいろな側面を持つ
アナロジーの量：本来の量と同じ状況ではないが、本来の量と共通する何らかの側面を持つ
NHK の番組などは、難しい内容を素人が分かった気にさせるために、アナロジーを多用する。アナロジーを多用すると、話が飛躍して面白くなる。物理屋が NHK の映像を見るにあたっては、面白さを損なわない程度に、アナロジーではなく本来の量は何だったかを解説する。

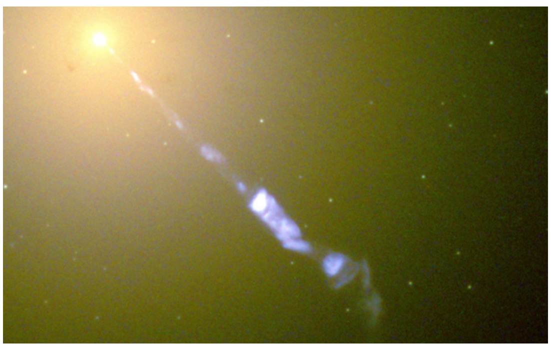
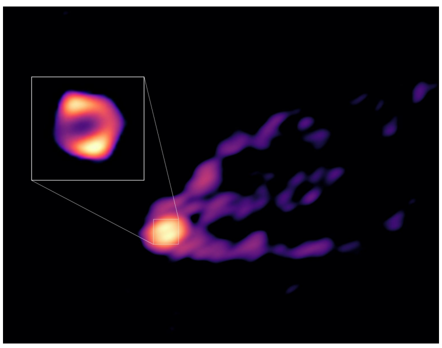
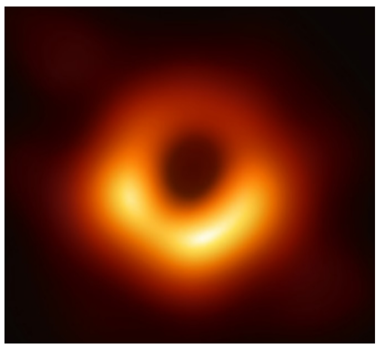
2　ブラックホール

古典的ブラックホール：
第 2 宇宙速度（その星の引力圏からの脱出速度)=光速

$$\text{エネルギーバランス：}\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mc^2 = G\frac{Mm}{r} \Rightarrow r = \frac{2GM}{c^2} \tag{1}$$

ブラックホールを星の密度で分類してみる。
$M = \rho \times 4\pi r^3/3$ を使うと、$r \to$ 大で、どこかで必ずブラックホールになる。

$$\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{4\pi r^2 \rho m}{3} \leq 0 \tag{2}$$

いろいろなタイプのブラックホール

a) 水素タイプ(最も軽い原子の密度) のブラックホール:

ミッチェル (1784 年)、$r_H = 500 r_\odot \Rightarrow$ いろいろな銀河中心にあるにある超大質量ブラックホール、例：天の川銀河中心のさそり座の $SgrA^*, M = 400$ 万 $M_\odot$, $M87,\ M = 65$ 億 $M_\odot$

b) 地球タイプ(地球の密度) のブラックホール:

ラプラス (1796 年)、$r_H = 250 r_\odot \Rightarrow$ このタイプのブラックホールは見つかっていない

c) 中性子タイプ(原子核の密度) のブラックホール:

$r_H = 120km \Rightarrow$ 恒星型のブラックホール、例:白鳥座の $CygnusX-1, M = 40M_\odot$

シュワルツシルド解の計量（ブラックホールの計量)

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM/c^2}{r})c^2(dt)^2 + \frac{(dr)^2}{1 - \frac{2GM/c^2}{r}} + r^2(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2 \tag{3}$$

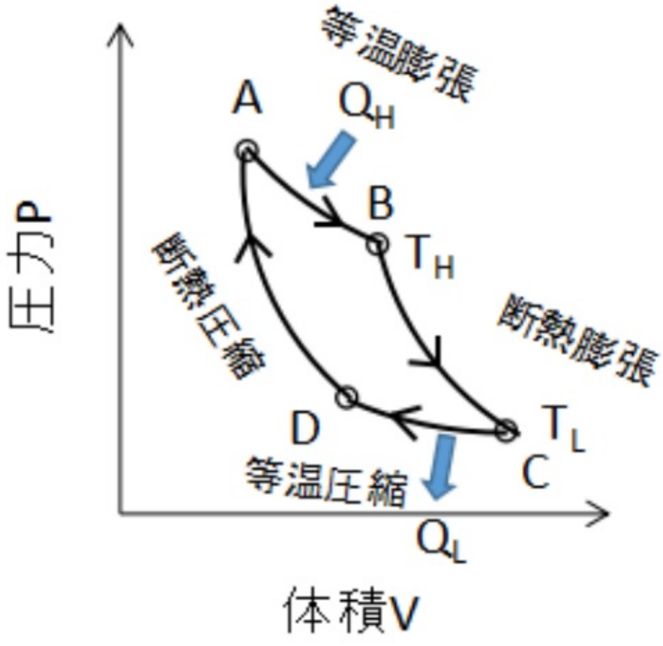
事象の地平線の半径（変なことになる半径) は $r_H = \dfrac{2GM}{c^2}$ で古典論での結果と同じ。

表面加速度 (事象の地平線での加速度) $a = \dfrac{GM}{r_H^2} = \dfrac{c^4}{GM}$ で質量 M の逆数に比例する。これがホーキング温度が質量 M の逆数に比例する理由。

注意：意味が付けやすい計量：isotropic coordinate

$$ds^2 = -\frac{(1 - \frac{GM/2c^2}{R})^2}{(1 + \frac{GM/2c^2}{R})^2}(cdt)^2 + (1 + \frac{GM/2c^2}{R})^4(dX^2 + dY^2 + dZ^2) \tag{4}$$

$$r = R(1 + \frac{GM/2c^2}{R})^2, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,\ R = \frac{GM}{2c^2}$$



3　いろいろなエントロピー

エントロピーの導入：

エントロピーは、クラウジウスがカルノーサイクルの研究を通して導入した。（1865 年）

クラウジウスは最適な熱機関かどうかを判定するために、

$$dS = \frac{d'Q}{T}, \quad (S：エントロピー、Q：熱量、T：絶対温度)$$

でエントロピーを導入した。カルノーサイクルでは、等温膨張 (吸熱、エントロピー増大) ⇒ 断熱膨張 (エントロピー変化なし) ⇒ 等温圧縮（放熱、エントロピー減少) ⇒ 断熱圧縮 (エントロピー変化なし) で元の圧力と体積に戻る。このこのサイクルでは

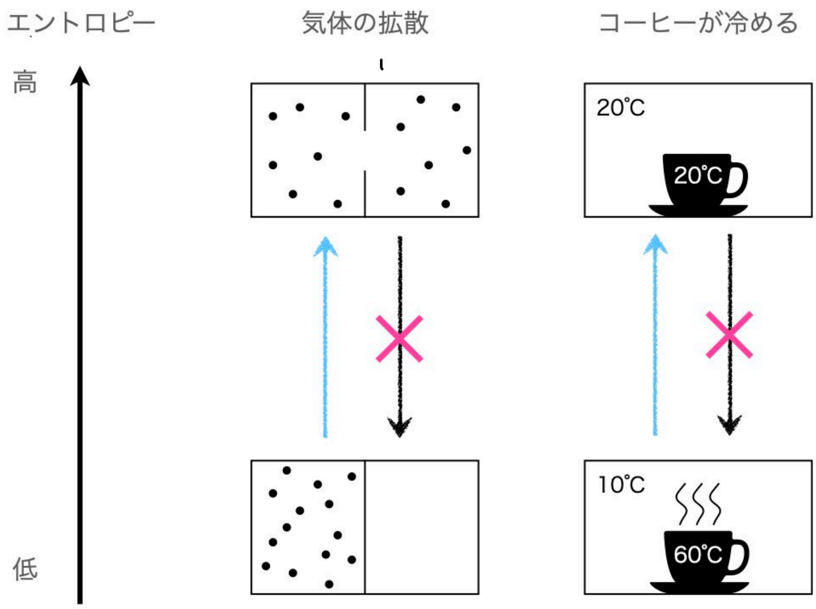
$$\oint dS = \oint \frac{d'Q}{T} = 0$$

となり、サイクルでエントロピーの変化はちょうどゼロになる。この意味は、このサイクルが最良のサイクルで、可逆になっていることを意味する。（特に平衡状態を保ち続ける準静的変化になっている) 。

本来のエントロピー：多粒子系（アボガドロ数程度）で、温度 T の平衡状態になっていて有限の体積 V の閉鎖系で、その系での熱過程で可逆かどうか（特に準静的変化をしているかどうか）を見るための量が本来のエントロピー。

素人向けのエントロピー：NHK

乱雑さはエントロピー、現代ではエネルギー（化石燃料、原子力発電、核融合発電）よりもエントロピー（世界人口増加、地球環境汚染、温暖化）が大事、生命はエネルギーを使って (栄養素を取り込んで) 絶えずエントロピーを減少させ (体がバラバラになるのを防ぎ) 続けている。(シュレディンガー)



クラウジウスのエントロピー (可逆かどうか)：dS(実際) $\geq dS$(理想) $= \dfrac{d'Q}{T}$;

ボルツマンのエントロピー (ミクロカノニカル 、状態数)

温度 T、体積 V の熱平衡状態のエントロピーを状態数から $S = k_B \log W(T, V)$ を使って求める。状態数を求めて、$E = \frac{3}{2}Nk_BT$ でエネルギーを温度で置き換えて、エントロピーは $S = \frac{3}{2}nR\log TV^{\gamma-1} + const. = \frac{3}{2}nR\log TV^{\gamma-1} + const.$ となる。気体分子の状態方程式 $pV = nRT$ 成り立っているので、元の圧力と体積に戻るサイクルでは、$\oint dS = 0$ が自明に成り立つ。

ギブスのエントロピー (カノニカル、確率)

素朴には、(状態数) $\sim 1/$(確率) として熱平衡状態のボルツマン分布を確率と考えて、エントロピーとして状態数の平均をエントロピーと考える。

$$S = \sum_i P(\epsilon_i) \log \frac{1}{P(\epsilon_i)} \tag{5}$$

このとき、ギブス・エントロピーは $S = \frac{3}{2} nR \log TV^{\gamma-1} + const$ でボルツマンのエントロピーと同じ結果を与える。

シャノンのエントロピー、フォン・ノイマンのエントロピー

ギブスのエントロピーの方法では、平衡状態とか有限の体積とかは問わなくて、確率が与えられれば、エントロピーのアナロジーを定義することができる。素朴に (状態数) $\sim$ (情報量) $\sim 1/$(確率) で、$P(E_i) =$ (事象 E_i の確率) として

a) (選択情報量)=自己エントロピー $= \log_2 \left(\dfrac{1}{P(E_i)} \right)$

確率的に珍しいことが起こった $\Rightarrow$ 情報量が多い $\Rightarrow 1/P(E_i) =$ 情報量

注意：log の底は 2, また k_B(次元を持つ量) が前についていない。

b) (平均情報量)=(シャノンのエントロピー、フォン・ノイマンのエントロピー)

$$= \sum_i P(E_i) \log_2 \left(\frac{1}{P(E_i)} \right)$$

ベッケンシュタインのブラックホール・エントロピー (1973 年):

ブラックホールは熱平衡になっているわけではなく、また開放系で体積が有限になっているわけはない。ブラックホール・エントロピーはエントロピーのアナロジーである。$dU = TdS - pdV$ のアナロジーとして、$U = Mc^2$(M=ブラックホールの質量), $T =$ ホーキング温度 から、$dU = T_H dS$ のアナロジーが成りたつとすると、$S =$ ブラックホール・エントロピー が事象の地平線の面積に比例することが示せる。(後で示す。)

ホーキング温度： ($M = 6M_\odot$ で $T_H = 10^{-8}$ ケルビン)

$$k_B T_H = h\, \frac{c}{\lambda_H} = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM} = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{a(\text{表面加速度})}{c}, \tag{6}$$

($\lambda_H = 8\pi^2 r_H \sim r_H =$ (事象の地平線程度の波長の放射)

ブラックホールの事象の地平線の円周を光速で回転するときの振動数は $\nu_H = \dfrac{c}{2\pi r_H} = \dfrac{c^3}{4\pi GM}$ より、それでホーキング温度の概算をすると、$k_B T = \dfrac{1}{4\pi} h\nu_H$ となる。

ブラックホール・エントロピー:

$G=\hbar=c=1$ の単位系で, $M\sim r_H$, $T_H\sim 1/r_H, dM=TdS$ より $\rightarrow S\sim r_H^2\sim M^2$

正確には, $S=\dfrac{k_B c^3}{4G\hbar}\times 4\pi r_H^2=\dfrac{k_B}{4}\dfrac{4\pi r_H^2}{\ell_P^2}$, (7)

$(r_H=\dfrac{2GM}{c^2}, \ell_P=\sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^3}}=$ プランク長 $=1.6\times 10^{-35}$ メートル$)$

となる。

プランク長とは何か?

(ブラックホールの地平線の半径)~(ブラックホールのコンプトン波長)、

すなわち, $\ell_P=\dfrac{2GM}{c^2}=\dfrac{h}{Mc}\times\dfrac{1}{4\pi}=\sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^3}}$. すなわち、ブラックホール自体を量子論の対象とする時の典型的な長さがプランク長である。

エンタングルメント・エントロピー

相関のある（エンタングルメント）密度行列をある種の確率と考える。そのときの、ギブスタイプのエントロピーのアナロジーがエンタングルメント・エントロピーである。

4 エンタングルメント

本来は、「量子もつれ」をエンタングルメントという。これは量子論での保存則と考えられる。(保存則：例：同時刻での全ての場所での角運動量の和は保存する。) エンタングルメントは、i)(量子論での) 保存則、ii) 遠隔作用、のアナロジーとしてよく用いられる。量子化されない縦波である、クーロン力、重力場 (ポテンシャルエネルギー）は、遠隔作用であり、エネルギー保存則から考えても、物理的に存在する。(横波で、量子化されて物質となったものは当然ながら、光速以下でしか伝わらない）(久米先生に質問された例)

5　ホーキング効果

重力の等価原理：重力と加速度は区別できない

重力が掛かっていない系 (自由落下系, 局所慣性系)=加速度運動をしていない系 (慣性系) と等価、例えば、(自由落下しているエレベータの中の系)=(慣性系) と等価

重力が掛かっている系=加速度運動をしている系と等価、
例えば、(地上で重力が掛かっている系)=(宇宙でロケットが加速度運動をしている系)

　自由落下している局所慣性系と重力が掛かっている系を一般座標変換で結びつけ、場の量の base の変換から、その二つの系の生成消滅演算子を結びつける。そのときに、局所慣性系の観測者に取っては、重力が掛かっている系の真空に光が生成されるのが観測される。(ボゴリューボフ変換）詳しい意味は、計算した後で議論する。

事象の地平線の近くの local 座標として次の ρ(長さの次元を持つ) を使う。

$$r = \frac{2GM}{c^2} + \frac{\rho^2 c^2}{8GM}$$

この local 座標での計量は

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= -\rho^2 \left(d(\frac{c^3}{4GM}t) \right)^2 + (d\rho)^2 = -\rho^2 \left(d(\frac{a(\text{表面})}{c}t) \right)^2 + (d\rho)^2 \\ &= -\rho^2 d(\hat{t})^2 + (d\rho)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで、$\hat{t}=\dfrac{a(\text{表面})}{c}t$ で $\hat{t}$ は無次元の量である。Eq.(8) が定加速度系の計量なので、flat と定加速度系を結びつける Rindler 計量を取る。ここでは、t と r 方向だけの 2 次元の計量を考え

$$(ds)^2=-(dt)^2+(dx)^2=-z^2(d\eta)^2+(dz)^2=e^{2\xi}[-(d\eta)^2+(d\xi)^2]$$

を取る。ここで、$t=z\cosh\eta,\ x=z\sinh\eta,\ \rho=z,\ \eta=\hat{t},$ でさらに $z=e^{\xi}$ と置いて、$t=e^{\xi}\sinh\eta, x=e^{\xi}\cosh\eta$ で結びついている。簡単のためスカラー場 ϕ を考え、flat と定加速度系で 2 通り展開する。

$$\phi=\int\frac{d\omega}{\sqrt{2|\omega|}}[a(\omega)e^{-i(t-x)\omega}+a^{\dagger}(\omega)e^{i(t-x)\omega}] \tag{9}$$

$$=\int\frac{d\omega'}{\sqrt{2|\omega'|}}[b(\omega')e^{-i(\eta-\xi)\omega'}+b^{\dagger'}(\omega')e^{i(\eta-\xi)\omega'}] \tag{10}$$

これから

$$b(\omega')=\int d\omega[\alpha(\omega,\omega')a(\omega)-\beta(\omega,\omega')a^{\dagger}(\omega)] \tag{11}$$

$$b^{\dagger}(\omega')=\int d\omega[\alpha^*(\omega,\omega')a^{\dagger}(\omega)-\beta^*(\omega,\omega')a(\omega)] \tag{12}$$

と求まる。これは

$$\alpha(\omega,\omega')\alpha(\omega,\omega'')-\beta(\omega,\omega')\beta(\omega,\omega'')=\delta(\omega'-\omega'')$$

を満たす。flat な計量での真空 $|0>$ では $a|0>=0$ だが、$b|0>\neq 0$ で、

$$<0|b^{\dagger}(\omega')b(\omega')|0>=\int d\omega|\beta(\omega,\omega')|^2$$

で与えられる分布で粒子が生成され、粒子数の分布は

$$<0|b^{\dagger}(\omega')b(\omega')|0>=\int d\omega|\beta(\omega,\omega')|^2=\frac{1}{e^{2\pi\omega'}-1}$$

と求まる。最後に、$\omega'\eta=\omega'(a(\text{表面})/c)t=\hat{\omega}t$ より、無次元の $\omega'=\dfrac{\hat{\omega}}{a(\text{表面})/c}$ と置き換え、

$$\frac{1}{e^{2\pi\omega'}-1}=\frac{1}{e^{\hbar\hat{\omega}/k_BT}-1}$$

と置くと、

$$k_BT=\frac{\hbar}{2\pi}\frac{a(\text{表面})}{c}=\frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$$

でホーキング温度が求まる。これから、ベッケンスタイン・エントロピーは熱力学の関係式 $dU = TdS$ のアナロジーで、$U = Mc^2$, $T =$ ホーキング温度 から、

$$S = \frac{k_B 4\pi G}{\hbar c} \times M^2$$

と求まる。この M を $r_H = 2GM/c^2$ を使って r_H で書き換えると

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} \times 4\pi r_H^2 = \frac{k_B}{4} \frac{4\pi r_H^2}{\ell_P^2} = \frac{k_B}{4} \frac{(\text{事象の地平線の面積})}{\ell_P^2}$$

となり、ブラックホール・エントロピーの面積則になる。

ところで、ホーキング効果を意味を付けてきちんと考えて見ると、昔からあるパラドックスに似たものになる。すなわち、重力下で自由落下している系の上の観測者は、重力が掛かっている系の真空に粒子が生成されるのを観測するが、重力が掛かっている系の観測者には粒子の生成は観測されない。(Rohlich, 1964)

サスカインドによる直感的なブラックホール・エントロピーの評価

事象の地平線程度の波長の光子が 1 個ブラックホールに入れば、ブラックホールの情報エントロピーが 1 だけ増加すると考える。そのときのブラックホールの質量の変化は $\Delta E \sim h\nu = hc/\lambda$ と考え、$\Delta(Mc^2) = \dfrac{1}{8\pi^2}\dfrac{hc}{r_H}$ より、$\Delta(4\pi r_H^2) = 4\dfrac{G\hbar}{c^3} = 4\ell_P^2$ となり、$\dfrac{\Delta(4\pi r_H^2)}{4\ell_P^2} = 1$ ビット の情報エントロピーが増加したことになる。情報エントロピーに k_B を掛け、ブラックホールのエントロピーの増加は $\Delta S = k_B \dfrac{\Delta(4\pi r_H^2)}{4\ell_P^2}$ で正しくブラックホールのエントロピーが得られる。

注意：ブラックホールのような宇宙スケールのものに対し量子論を使えるのか？太陽と地球の重力でのシュレディンガー方程式を考えているようなもので頓珍漢ではないのか？

6　ホーキングとサスカインド、ト・フーフトとの 20 年に渡る論争

ブラックホールの質量とエントロピーのアナロジー

エントロピーは変化しないか増加する：⇒ 増加する場合は不可逆な過程が含まれている。物質はブラックホールに落ち込むが、ブラックホールからは物質は出てこれない。⇒ ブラックホールの質量は変化しないか増加する。⇒ 物質がブラックホールに落ち込むのは不可逆過程。では、時間反転したらどうなるのか？（実際の不可逆過程は、ブラックホールの降着円盤が行っている。降着円盤の摩擦で、落下してくる物体はエネルギーと角運動量を失い、それがジェットとなって外に吹き出し、そのために、物体はブラックホールに落下できる。)

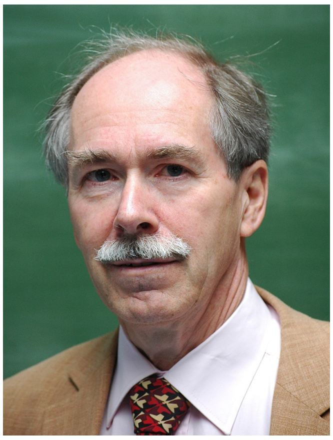
●ホーキング：ケンブリッジ大学ルーカス教授職（ニュートン、バベッジ、ストークス、ディラック)

車いすの天才 (大変人)、変わった説を提唱：宇宙が収縮に転じると時間が反転する、ビッグバンの前は時間はまず虚数から始まった、タイムマシーン

●サスカインド：アメリカの西海岸の名門スタンフォード大学教授、配管工から素粒子物理学者へ、アナロジーで直感的に物事を説明するのがうまい。

●ト・フ－フト:オランダのユトレヒト大学の大秀才、ノーベル賞を受賞

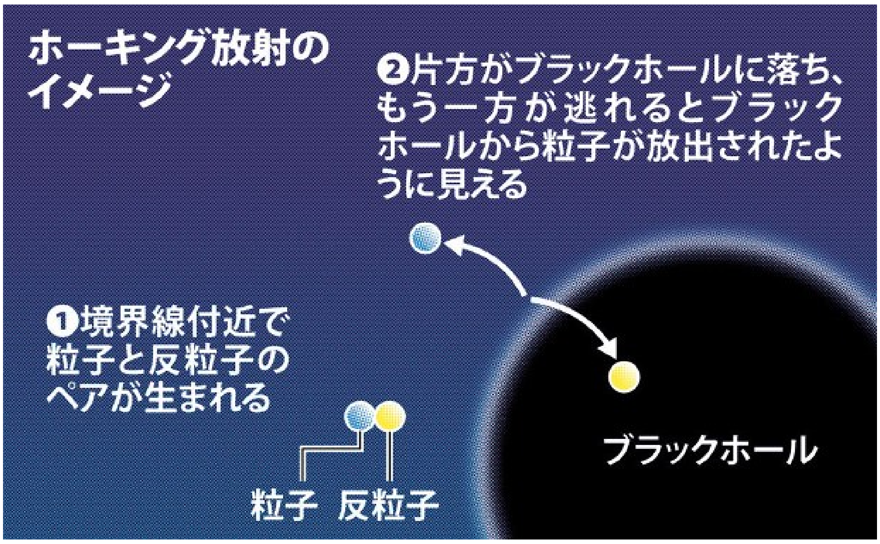




Q1:ブラックホールに、ものでなく「情報」が吸い込まれるとは？

例えばブラックホールが電荷を持っていて、それが蒸発して無くなると、電荷が保存しなくなる。(ホーキング効果で保存量は従来通り保存するとするのは大前提)

Q2:ブラックホールはホーキング効果で蒸発して、最後に無くなるのか？



ホーキング効果では、ブラックホールの内側からエネルギーが取り出されるが、粒子の生成は事象の地平線の外側で起こり、例えば事象の地平線の外側で粒子が対生成されて、一方がブラックホールに落ち込み、他方が外に出ていく。このとき、ブラックホールの質量が増え位置エネルギーの変化がマイナスになり束縛がさらに強くなり、その代わりに外側に粒子が出て行ったことになる。蒸発して無くなるというのとは異なる。

ブラックホールからポテンシャル・エネルギーを通してエネルギーが出てくるのと、事象の地平線の内側から外側に物質が出てくるのとは全く異なる。

Q3:サスカインドの考えだと、ブラックホールに落ち込む物体は、遠方の観測者から見ると事象の地平線にとどまり続け、それがホーキング放射で外に放射されると考えている。ホーキング効果はあるが、温度はアナロジーの温度で、熱平衡からの熱放射という意味でのホーキング放射というものは無いと思われる。また、「情報」はブラックホールに吸い込まれないというのであれば、ブラックホールには何も落ち込めなくなるのではないか？

　しかし、宇宙初期から銀河中心の超巨大質量のブラックホールはだんだん巨大化してきた。また、時間反転不変性とブラックホールの質量は必ず増加することのパラドックスは分からない。

サスカインドの「相補性」

事象の地平線での観測者は事象の地平線を超えて物体が落ち込む、遠方での観測者は物体は永遠に事象の地平線に落ち込み続けて事象の地平線を超えては落ち込まない、この２つが共に正しい。

→ 近くの観測者が起こったことを観測したのなら、遠くの観測者にとって起こらなかっ

たことにはならなくて、単に観測できていないだけである。

ホログラフィック原理

3 次元体積の情報が、その 2 次元の表面上に符号化されている。
ト・フーフトのホログラフィック原理とは、単に次元解析で書き換えたものの解釈に過ぎないのではないのか？

$$S = \frac{k_B 4\pi G}{\hbar c} \times M^2 = \frac{k_B}{4} \frac{(\text{事象の地平線の面積})}{\ell_P^2}$$

マルダセナの AdS_5/CFT_4 対応の superstring に依らない部分の話を紹介。

AdS_5： $(4+1)$ 次元ブラックホール	CFT_4： $(3+1)$ 次元 massless な場の理論
$SO(4,2)$	「$SO(4,2)$」(hypercone を不変にする群)
$-t_1^2 - t_2^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ $= -\ell^2 = 1/\Lambda$ の表面の計量	回転 3 個、ローレンツ変換 3 個、平行移動 4 個 スケール変換 1 個、特殊共形変換 4 個、計 15 個
宇宙項 Λ のあるブラックホール解	massless な場の理論、例えば Maxwell 方程式

注意 1：重力理論とは関係なく、$(3+1)$ 次元 massless な場の理論の共形変換不変性の説明に AdS_5 で $\ell = 0$ $(hypercone)$ の空間が大昔から使われてきた。(1936 年の Dirac の論文が最初)

注意 2：シュワルツシルド型のブラックホールで、ホーキングの計算したホーキング温度が出てくる。どんなタイプの「ブラックホール」でも、同じホーキング効果になるわけではない。(エントロピーが面積則になるとは限らない)

AdS_3/CFT_2 対応 (Brown-Henneaux)

AdS_3 理論には BTZ「ブラックホール」解がある。この重力理論を 3 脚場で書き換えると、Chern-Simons の作用になり、作用が全微分になる。すなわち、運動方程式は自明に成り立ち、表面項のみになる。これが、3 次元重力理論が 2 次元共形理論に対応するという話である。

Q. 本当にこれは正しいのか？ BTZ「ブラックホール」解はどうなったのか？

注意：BTZ 「ブラックホール」解 (AdS_3+ 回転) と AdS_3 解（Wikipedia）の比較

$$
\begin{aligned}
&BTZ\,\text{解：}\, ds^2 = -(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2})(dt)^2 + \frac{1}{(-M + r^2/\ell^2 + J^2/4r^2)}(dr)^2 \\
&+r^2(d\phi - \frac{J}{2r^2}dt)^2 \\
&\xrightarrow[J\to 0]{} ds^2 = -(-M + r^2/\ell^2)(dt)^2 + \frac{(dr)^2}{(-M + r^2/\ell^2)} + r^2(d\phi)^2 \qquad (13)\\
&AdS_3\text{解：}\, ds^2 = -(1 + r^2/\ell^2)(dt)^2 + \frac{(dr)^2}{(1 + r^2/\ell^2)} + r^2(d\phi)^2 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

$M = -1$ とすると、 AdS_3 解は「ブラックホール」解（有限の r で変なことが起こる解 ）では無くなる。(宇宙項 $\Lambda = -1/\ell^2$ なので、$\ell \to \infty$ で真空のアインシュタイン方程式になり、flat な計量はミンコフスキーになるべし）